Was bisher geschah

Wissensrepräsentation und -verarbeitung in Logiken

- klassische Aussagenlogik
- klassische Prädikatenlogik

- Syntax (Wiederholung)
- Substitutionen
- prädikatenlogische Normalformen:
  bereinigte Form, Pränexform, Skolemform, Klauselform
- Semantik (Wiederholung)
- Grundinstanziierung

Prädikatenlogik: Modellierungsbeispiel

Wissen
- Paul liest Kriminalromane.
- Bob liest Zeitungen.
- Tina liest Arztromane.
- Tina mag alle Krimileser.
- Krimileser mögen Zeitungsleser.
- Bob mag jeden, der einen Krimileser mag.
- Zwei Personen sind Freunde, wenn sie einander mögen.
- Tina liest alles, was ihre Freunde lesen.

Darstellung als prädikatenlogische Formelmenge

Fragen
- Mag Tina Bob?
- Wen mag Tina?
- Mag Bob Tina?
- Wer mag (wenigstens einen) Zeitungsleser?
- Wer mag wen?
- Wer ist mit wem befreundet?
- Wer liest was?

Typ der Lösung ja / nein oder Substitution (und evtl. Begründung)

Lösungen ...

Lösungsidee

1. Formulierung der Wissensbasis als Formelmenge
2. Formulierung der Frage als Formel
   (Behauptung, evtl. mit Variablen)
3. Transformation in Klauselmenge
4. Grundinstanziierung (sofern möglich)
5. Lösung durch aussagenlogische Resolution

Nachteil: aufwendig

Idee: benötigte Instanzen nach Bedarf erzeugen

Wiederholung Substitutionen

Substitution: partielle Funktion $\theta : X \to \mathrm{Term}(\Sigma, X)$
übliche Notation: $\theta = \{x \mapsto t_1, y \mapsto t_2, \ldots\}$
Anwendung einer Substitution:

- $s\{x \mapsto t\}$ ist der Term, welcher aus dem Term s durch Ersetzung jedes Vorkommens der Variable x durch t entsteht
- $\varphi\{x \mapsto t\}$ ist die Formel, die aus der Formel φ durch Ersetzung jedes freien Vorkommens der Variable x durch t entsteht

Beispiele:

- $g(x, f(a))\{x \mapsto b\} = g(b, f(a))$
- $P(y, x, f(g(y, a)))\{x \mapsto g(a, z), y \mapsto a\} = P(a, g(a, z), f(g(a, a)))$
- $g(x, f(a))\{x \mapsto b, y \mapsto a\} = g(b, f(a))$
- $g(b, f(y))\{x \mapsto b, y \mapsto a\} = g(b, f(a))$
- $P(b, f(y)) \to Q(x)\{x \mapsto b, y \mapsto f(a)\} = P(b, f(f(a))) \to Q(b)$
- für $\theta = \{x \mapsto b\}, \sigma = \{y \mapsto f(a)\}$ (auch $\theta(x) = b, \sigma(y) = f(a)$) gilt $(P(b, f(y)) \to Q(x))\theta\sigma = \sigma(\theta(P(b, f(y)) \to Q(x))) =$ $= P(b, f(f(a))) \to Q(b)$

Unifikator

Substitution θ heißt genau dann Unifikator der Terme (Atome, Literale) t_1 und t_2 (θ unifiziert t_1 und t_2), wenn $\theta(t_1) = \theta(t_2)$ gilt.
Beispiele:

1. $\theta = \{x \mapsto b, y \mapsto a\}$ unifiziert $t_1 = g(x, f(a))$ und $t_2 = g(b, f(y))$
2. $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y)\}$ unifiziert $f(x, g(y))$ und $f(g(z), z)$ (und $f(g(z), g(y))$).
3. $\{x \mapsto g(g(a)), y \mapsto a, z \mapsto g(a)\}$
   unifiziert $f(x, g(y))$ und $f(g(z), z)$.
4. $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y), v \mapsto f(a)\}$
   unifiziert $f(x, g(y))$ und $f(g(z), z)$.

Terme (Atome, Literale) t_1, t_2 heißen genau dann unifizierbar, wenn ein Unifikator für t_1 und t_2 existiert.
Beispiele:

1. $g(x, f(a))$ und $g(b, f(y))$ sind unifizierbar,
   $f(g(a, x))$ und $f(g(f(x), a))$ nicht. Warum?
2. $\neg P(a, f(x), g(a, y))$ und $\neg P(x, f(y), z)$ sind unifizierbar,
   $R(f(a), x)$ und $R(x, a)$ nicht.

Ordung auf Unifikatoren

Für zwei Unifikatoren σ, θ der Terme t_1, t_2 gilt:

σ heißt genau dann allgemeiner als θ, wenn eine Substitution ρ (die nicht nur Umbenennung ist) existiert, so dass für jeden Term t_i gilt $\theta(t_i) = \rho(\sigma(t_i))$

(analog Teilerrelation)

Beispiele: Unifikatoren für $f(x, g(y)), f(g(z), z)$

1. Unifikator $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y)\}$ ist allgemeiner als
   $\{x \mapsto g(g(a)), z \mapsto g(a)\}$
   $\rho = \{y \mapsto a\}$
2. Unifikator $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y)\}$ ist allgemeiner als
   $\{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y), v \mapsto g(b)\}$
   $\rho = \{v \mapsto g(b)\}$

Allgemeinster Unifikator

Zu unifizierbaren Termen (Atomen, Literalen) s, t existiert (bis auf Umbenennung der Variablen) genau ein Unifikator θ mit der folgenden Eigenschaft:
Für jeden Unifikator σ für s, t ist θ allgemeiner als σ.
Dieser heißt allgemeinster Unifikator $\theta = \mathrm{mgu}(s, t)$ von s und t.

(analog ggT)

Beispiele:

- $\mathrm{mgu}(f(x, a), f(g(b), y)) = \{x \mapsto g(b), y \mapsto a\}$
- $\mathrm{mgu}(f(x, g(y)), f(g(z), z)) = \{x \mapsto g(g(y)), z \mapsto g(y)\}$

Unifizierbarkeit

- t ist mit t unifizierbar (mit Unifikator $\theta = \emptyset$)
- t ist mit $x \in \mathbb{X}$ unifizierbar (Unifikator $\theta = \{x \mapsto t\}$) gdw. x in t nicht vorkommt
- $f(t_1, \ldots, t_n), g(s_1, \ldots, s_m)$ sind nicht unifizierbar, falls $n \neq m$ oder $f \neq g$
- θ ist Unifikator für $f(t_1, \ldots, t_n), f(s_1, \ldots, s_n)$ gdw. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \theta$ unifiziert t_i und s_i

Unifikationsalgorithmus

zur Bestimmung des $\text{mgu}(s, t)$ für $s, t \in \text{Term}(\Sigma_F, \mathbb{X})$ oder $s, t \in \text{Atom}(\Sigma, \mathbb{X})$ (sofern dieser existiert)

Algorithmus: Unifikationsalgorithmus

Eingabe: $s, t \in \text{Term}(\Sigma_F, \mathbb{X})$ (oder $\in \text{Atom}(\Sigma, \mathbb{X})$)
Ausgabe: $\theta = \text{mgu}(s, t)$ oder „nicht unifizierbar“

wenn $s = t$ **dann**
  $\theta \leftarrow \emptyset$
sonst wenn $s \in \mathbb{X}$ **dann**
  wenn $s \in \text{var}(t)$ **dann** „nicht unifizierbar“
  sonst $\theta \leftarrow \{s \mapsto t\}$
sonst wenn $t \in \mathbb{X}$ **dann**
  $\theta \leftarrow \text{mgu}(t, s)$
sonst wenn $s = f(s_1, \ldots, s_m), t = g(t_1, \ldots, t_n)$ **dann**
  wenn $f = g$ *(und $m = n$)* **dann**
   $\theta \leftarrow \text{mgu}(s_1, t_1) \circ \cdots \circ \text{mgu}(s_m, t_m)$
  sonst „nicht unifizierbar“

Dabei gilt für jede Substitution θ:

$$\theta \circ \text{„nicht unifizierbar“} = \text{„nicht unifizierbar“} \circ \theta = \text{„nicht unifizierbar“}$$

Unifikationsalgorithmus – Beispiele

- $\mathrm{mgu}(f(x, h(y), y), f(g(z), z, a)) =$
  $\{x \mapsto g(h(a)), z \mapsto h(a), y \mapsto a\}$
- $\mathrm{mgu}\,(P(f(x), g(y, h(a, z))), P(f(g(a, b)), g(g(u, v), w)))) =$
  $\{x \mapsto g(a, b), y \mapsto g(u, v), w \mapsto h(a, z)\}$
- $\mathrm{mgu}(P(f(a), g(x)), P(y, y))$ existiert nicht (ÜA)
- $\mathrm{mgu}(f(x, g(a, z)), f(f(y), f(x))$ existiert nicht (ÜA)
- $\mathrm{mgu}(f(x, x), f(y, g(y))$ existiert nicht (ÜA)
- $\mathrm{mgu}(f(x, g(y)), f(y, x)$ existiert nicht (ÜA)